J Math Didakt (2012) 33:113–141
DOI 10.1007/s13138-012-0034-x

ORIGINALARBEIT

Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks als Herstellen von Bezügen

Christian Rüede

Eingegangen: 11. Juli 2011 / Angenommen: 7. Januar 2012 / Online publiziert: 24. Januar 2012

Zusammenfassung Das Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks ist ein individueller Prozess, bei dem eine Person Teile des Ausdrucks aufeinander bezieht. Durch die Beschreibung der dabei hergestellten Bezüge wird erstens explizit gemacht, in welche Bündel ein Proband die algebraische Zeichenreihe aufteilt und als was er sie interpretiert, und zweitens, wie die Person die Bezüge gebraucht. Das erlaubt die Rekonstruktion der internen Bedeutung, welche die Person dem Ausdruck zuschreibt. Dieses Konzept wird in diesem Artikel zur Analyse von Interviews verwendet. Es konnten empirisch vier Ebenen des Herstellens von Bezügen identifiziert werden: In einem Ausdruck Bezüge herstellen kann heißen, ihn optisch einfacher machen, ihn ändern, Teile umdeuten oder den Ausdruck klassifizieren. Dies ist bedeutsam im Algebraunterricht für das Aushandeln der Bedeutung von individuellen Strukturen.

Schlüsselwörter Algebra · Strukturieren · Herstellen von Bezügen · Gleichungen · Terme · Sekundarstufe

Mathematics Subject Classification (2000) C30 · C70 · H20 · H30

The Structuring of an Algebraic Expression as the Production of Relations

Abstract Structuring algebraic expressions is an individual process in which a person sets different parts of the expression in relation to each other. A description of these relations shows two things: one, into which parts the individual sorted the algebraic expression and how he or she interprets them, and two, in which way the individual uses these relations. Studying these relations therefore allows a reconstruction of the personal meaning which an individual ascribes to the algebraic expressions. In

C. Rüede (✉)
Institut für Gymnasial- und Berufspädagogik, Universität Zürich, Beckenhofstrasse 35, 8006 Zürich, Schweiz
e-mail: christian.rueede@igb.uzh.ch

this article, this conception is used to analyse interviews in which individuals analysed algebraic expressions. Four types of relations were identified: Producing relations within an algebraic expression can mean to simplify it visually, to change it, to re-interpret parts of it or to classify the expression. These insights are important for the teaching of algebra, particularly for meaning negotiation within individual structures.

1 Einleitung

Gemäß Kieran (1989) sind die Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern beim Umgang mit Termen und Gleichungen zurückzuführen auf Probleme a) beim Variablenbegriff, b) beim Übergang von arithmetischen zu algebraischen Konventionen und c) beim Erkennen und Gebrauchen von Strukturen. Von diesen drei Punkten hob Kieran den dritten hervor, weil er vielen Schülerinnen und Schülern während ihrer ganzen Schulkarriere Schwierigkeiten bereitet. Analog bezeichnet Malle (1993, S. 254) das Strukturieren von Termen und Gleichungen als „*crux* aller Schülerfehler beim Umformen". Die Häufigkeit von Schülerfehlern beim Erkennen und Gebrauchen von Strukturen konnte in zahlreichen Studien empirisch nachgewiesen werden, beispielsweise in Hoch und Dreyfus (2004, 2005), Linchevski und Livneh (1999), Malle (1993), Sfard und Linchevski (1994), Star et al. (2005).

In den zitierten Studien wird unter der Struktur eines algebraischen Ausdrucks eine charakterisierende, objektive Eigenschaft des Ausdrucks verstanden. Solche Strukturen machen mathematische Sachverhalte explizit, welche hilfreich für das Umformen des Ausdrucks sind. Zur Illustration sei der in Hoch und Dreyfus (2004) verwendete Begriff der Struktur erläutert. Für jene Autoren ist die Struktur eine bestimmte *Form* (shape) mit einer *internen Ordnung* (internal order). Beispielsweise besitzt $4x^2 - x^3 + 5(4 - 2x) = (3 - x^2)(6 + x)$ die Struktur $ax^2 + bx + c = 0$ (ebd., S. 50). Die Normalform der quadratischen Gleichungen wird der zu erkennenden Struktur gleichgesetzt. Im obigen Beispiel ist die Struktur $ax^2 + bx + c = 0$ verborgen, bei der Gleichung $10x^2 - 13x + 2 = 0$ hingegen wäre sie offensichtlich. Der mit der Struktur $ax^2 + bx + c = 0$ mitgemeinte mathematische Sachverhalt lautet: wird die entsprechende Gleichung auf die Normalform gebracht und die Lösungsformel für quadratische Gleichungen verwendet, dann erhält man ihre Lösung(en). Hoch und Dreyfus lassen sich daher so verstehen, dass das Strukturieren einer Gleichung ihrem Klassifizieren als Gleichungstyp entspricht. Diese Bestimmung des Begriffs der Struktur und des Strukturierens führt schließlich zur Identifikation von fünf Strukturen von Termen respektive Gleichungen, welche für die Sekundarstufe zentral sind, nämlich $a^2 - b^2$, $a^2 + 2ab + b^2$, $ab + ac + ad$, $ax + b = 0$ und $ax^2 + bx + c = 0$ (Hoch und Dreyfus 2010, S. 25). Gemäß den Autoren sind diese Strukturen in typischen algebraischen Ausdrücken der Sekundarstufe zu erkennen, das heißt, die Schüler und Schülerinnen der Sekundarstufe müssen einen typischen algebraischen Ausdruck einer der obigen fünf Strukturen zuordnen können.

Anders fasst Malle (1993) den Begriff der Struktur auf. Wenn er vom „Erkennen von Termstrukturen" (ebd., S. 190) spricht, meint er ein Identifizieren von Teiltermen. Beispielsweise kann die linke Seite der Gleichung $4x + 3 = 11$ auf drei Arten strukturiert werden (Abb. 1).

$\boxed{4 \cdot x + 3} = 11$ $\boxed{4 \cdot x} + \boxed{3} = 11$ $\boxed{4} \cdot \boxed{x} + \boxed{3} = 11$

Abb. 1 Drei verschiedene Termstrukturen der Gleichung $4x + 3 = 11$ nach Malle (1993, S. 189)

Diese Termstrukturen geben Aufteilungen der linken Seite der Gleichung $4x + 3 = 11$ in einzelne Einheiten an. Sie sind durch die Gesetze, die den Aufbau eines Terms regeln, bestimmt. Also stehen Termstrukturen für den mathematischen Sachverhalt, in welche einzelnen Teilterme ein mathematischer Ausdruck aufgeteilt werden kann und wie diese Teilterme miteinander verbunden sind.

Schließlich sei die Definition von Kieran (1989) vorgestellt. Sie trennt zwischen *Oberflächenstruktur* (surface structure) und *Systemstruktur* (systemic structure). Die Oberflächenstruktur beschreibt dabei die Rechnung, die ein Term repräsentiert, sowie die Gleichheit zweier Terme links und rechts des Gleichheitszeichens. Die Systemstruktur umfasst alle äquivalenten Formen, zu denen ein Term gemäß den Rechengesetzen umgeformt werden kann, beziehungsweise alle Gleichungen, die zu einer Gleichung äquivalent sind. Die durch die Oberflächen- und Systemstruktur ausgedrückten mathematischen Sachverhalte betreffen also einerseits den Aufbau des Terms oder der Gleichung und andererseits die Ausdrücke, die zum Term oder der Gleichung äquivalent sind.

Die von Hoch und Dreyfus, Malle und Kieran beschriebenen Strukturen sind allein durch den algebraischen Ausdruck vorgegeben und werden nicht von Personen hergestellt, die den Ausdruck umformen. Dieser Begriff der Struktur orientiert sich an der mathematischen Theorie, an den mathematischen Definitionen und Theoremen. Zur Rekonstruktion von individuellen Lern- und Denkwegen sind hingegen Begriffe zur Beschreibung der mathematischen Praxis, also des mathematischen Tätigseins, geeigneter. Wichtig werden dann *Strukturierungen*, also die individuellen Auffassungen von Strukturen. Daher wird in diesem Artikel eine Definition für „Strukturierung" und „Strukturieren" vorgeschlagen, mit der (auch) solch individuelle Auffassungen beschrieben werden können. Eine Strukturierung eines algebraischen Ausdrucks wird in diesem Artikel mit den von einer Person hergestellten Relationen (Bezügen) zwischen seinen Teilen gleichgesetzt. Strukturieren ist dann ein Herstellen von Bezügen. Diese Konzeption erlaubt die Beschreibung des individuellen Prozesses, *wie* Personen Umformungsmöglichkeiten erkennen. Denn wenn eine Person einen algebraischen Ausdruck vereinfachen muss, schaut sie ihn zuallererst einmal an. Ihr fallen einzelne Teile auf. Sie bezieht diese aufeinander und stellt Zusammenhänge zwischen ihnen her. Mit der Strukturierung konstruiert sich die Person ihre individuelle Bedeutung des Ausdrucks, denn die Bedeutung eines algebraischen Ausdrucks wird generiert durch die Bezüge zwischen den vorkommenden Zeichen. Zur Illustration ein Beispiel: $(4x + 1)(4x - 1) + 1$. Wer hier ausschließlich die beiden Klammern aufeinander bezieht, fasst $(4x + 1)(4x - 1)$ als ein Produkt auf. Wer hingegen die beiden Klammern gemeinsam auf die isolierte 1 und umgekehrt bezieht, versteht $(4x + 1)(4x - 1)$ als einen Summanden. Aus fachlicher Sicht sind beide Sichtweisen richtig.

Ein solcher Zugang zum Strukturieren von Termen und Gleichungen ist vor allem darum wichtig, weil ohne Berücksichtigung der Individualität die Rekonstruktion von Denk- und Lernwegen unmöglich ist. Außerdem setzt eine produktive Unterstützung und Förderung des Lernens bei diesen individuellen Denkprozessen an (Ruf und Gallin 1998; Lengnink et al. 2011). Das in diesem Artikel dargelegte Modell des Strukturierens ermöglicht eine Beschreibung der individuellen Denkwege beim Lösen von Gleichungen und Vereinfachen von Termen. Es betont die individuellen Prozesse des Strukturierens, indem untersucht wird, welche Teilterme die Schülerinnen und Schüler wann und wie aufeinander beziehen: Was fällt ihnen zuerst auf? Was denken sie sich dabei? Wie strukturieren sie? Welche Bedeutungen verbinden sie mit ihren Strukturierungen? – alles Fragen, die zur Unterstützung der einzelnen Lernprozesse wichtig sind. Der hier vorgeschlagene Zugang zu individuellen Prozessen des Strukturierens dient der Beantwortung solcher Fragen.

Darüber hinaus findet der Ansatz, das Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks als Herstellen von Bezügen zwischen seinen Teilen aufzufassen, in Unterrichtskonzepten zur Entwicklung des algebraischen Denkens Anwendung. Beispielsweise betonen Carpenter et al. (2003) die Wichtigkeit des *relationalen Denkens* (relational thinking) in der Grundschule. Sie schlagen Aufgabenformate wie $67 + 83 = \square + 82$ vor. Solche Beispiele können operational gelöst werden, etwa indem 67 zu 83 addiert und vom Resultat 82 abgezogen wird. Wer hingegen relational denken kann, stellt zwischen 83 und 82 einen Bezug her, nämlich über die Konstanz der Summe beim ungleichsinnigen Verändern zweier Summanden. Auf diese Weise lernen schon Kinder, arithmetische Ausdrücke nicht nur auszurechnen, sondern auch Bezüge zwischen ihnen herzustellen. Durch die Förderung des relationalen Denkens in der Grundschule erhoffen sich obige Autoren erstens, dass die Kinder das Gleichheitszeichen als Äquivalenz auffassen und nicht nur als Befehl zum Ausrechnen verstehen, und zweitens, dass sie in der Sekundarstufe in der Lage sein werden, in algebraischen Ausdrücken Bezüge herzustellen, die „quer" zu den Operationszeichen liegen (Malle 1993). Denn sie müssen dann Gleichungen wie $ax - x = 1$ nach x auflösen. Das gelingt nur dann, wenn sie in $ax - x$ die Teile links und rechts vom Operationszeichen nicht nur operational als Subtraktion, sondern als Terme mit einem gemeinsamen Faktor – nämlich x – aufeinander beziehen können, was sie dann zum Ausklammern dieses gemeinsamen Faktors führt.

In diesem Artikel wird das Konzept des Herstellens von Bezügen in den Abschn. 2 und 3 theoretisch fundiert und ausführlich umschrieben. Seine empirische Ausprägung ist Gegenstand der Abschn. 4 und 5. Dieser Artikel betont dabei vier, empirisch unterscheidbare Ebenen, auf denen sich das Herstellen von Bezügen abspielt. In Rüede (submitted) liegt der Schwerpunkt hingegen auf der Vielfalt der Bezüge, besonders auf jenen, die von Experten hergestellt wurden.

2 Theoretischer Hintergrund

In diesem Abschnitt wird dargestellt, dass beim Strukturieren Bedeutung nicht vorhanden ist, sondern durch Herstellung von Relationen erst konstruiert wird, und dass dabei implizite Prozesse wichtig sind.

2.1 Durch das Herstellen von Bezügen zur internen Semantik

Eine Person konstruiert sich durch das Herstellen von Bezügen in einem algebraischen Ausdruck dessen (interne) Bedeutung. Für die Begründung dieser Behauptung wird vorerst geklärt, inwiefern beim Umformen von Termen und Gleichungen Bedeutung überhaupt entstehen kann.

Ausgangspunkt ist die Feststellung, dass Terme und Gleichungen an und für sich bedeutungslose Objekte sind. Bedeutung wird ihnen erst durch das Individuum zugeschrieben. Indem eine Person etwas mit einem Term macht, erhält er Bedeutung für sie. Beispielsweise kann eine Person einen Term vereinfachen. Wichtig wird dann das Wissen der Person darüber, wie man Umformungsregeln anwendet, wie man Terme betrachten und an Vereinfachungen herangehen kann. Dieses Wissen der Person, wie etwas zu handhaben ist, wird in diesem Artikel als deren *Auffassung* bezeichnet. Die Person trägt ihre Auffassung an den Term heran. Diese leitet ihre Handlungen und generiert dessen *interne Bedeutung*, das heißt: seine Bedeutung im Kontext des algebraischen Kalküls. Kieran (2006) spricht von *interner Semantik* (internal semantic). Die interne Bedeutung wird somit von der Person konstruiert und umfasst insbesondere das Wissen darüber, welche Umformungen im konkreten Fall erlaubt sind und welche nicht. Dabei wird in diesem Artikel mit *Umformung* der Übergang vom algebraischen Ausdruck zum umgeformten Ausdruck bezeichnet.

Terme erlangen aber auch in außermathematischen Kontexten Bedeutung, wie etwa bei Textaufgaben (Radford und Puig 2007). In diesem Fall spricht Kieran (2006) von *externer* (external) *Semantik*. Diese ist wichtig beispielsweise bei der Interpretation des Terms im Sachzusammenhang oder bei der Modellierung einer realen Situation. Ähnlich unterscheiden Hiebert und Carpenter (1992, S. 72) zwei Arten, wie sich bei Lernenden die Bedeutung von mathematischen Symbolen entwickelt. Einerseits lernen sie innerhalb des mathematischen Systems, Verbindungen zwischen Symbolen herzustellen, und andererseits verbinden sie Symbole mit Darstellungen außerhalb des Systems, etwa mit physikalischen Objekten. Die erste Art der Bedeutungskonstruktion korrespondiert mit der internen, die zweite mit der externen Semantik. Zweifelsohne sind die interne und die externe Semantik voneinander abhängig, gerade beim Erlernen der Algebra. Trotzdem wird hier auf die erstgenannte fokussiert. Denn die im Abschn. 4 und 5 vorgestellte Untersuchung fokussiert darauf, welche Umformungen – und nicht welche Sachzusammenhänge – eine Person mit dem algebraischen Ausdruck verbindet. Die dort vorgestellten algebraischen Ausdrücke sind allesamt den Probanden losgelöst von außermathematischen Zusammenhängen vorgelegt worden. Grundsätzlich gilt es aber zu bedenken, dass auch die externe Semantik die Strukturierung eines algebraischen Terms beeinflussen kann. Das ist beispielsweise dann der Fall, wenn ein Term eine reale Situation modelliert und genau diese Situation die semantische Basis für die Form des Terms bildet.

An dieser Stelle ist der Hinweis wichtig, dass diesem Artikel ein pragmatisches Bedeutungskonzept zugrunde gelegt ist, das besagt: Die interne Bedeutung eines algebraischen Ausdrucks entspricht seinem Gebrauch im algebraischen Kalkül. Dieser Gebrauch besteht darin, *wann* eine Person den Ausdruck *wie* umformt (Sfard 2008) oder strukturiert. Umformungen und Strukturierungen bedingen sich gegenseitig. Die interne Bedeutung eines Ausdrucks ist somit dem Gebrauch seiner Strukturierungen gleichgesetzt. Dieser Gebrauch äußert sich beispielsweise darin, welche Überlegungen eine Person zur Strukturierung des Ausdrucks führen, welche Umformungen sie aus der Strukturierung folgert oder wie sie die Strukturierung zur Einschätzung von möglichen Umformungen nutzt. Strukturieren meint dann genau einen solchen Gebrauch der Strukturierung.

Die Verwendung eines pragmatischen Bedeutungsbegriffs ist für die Mathematikdidaktik nicht neu. Epple (1994) gibt über seine Verwendung in philosophisch orientierten Untersuchungen zur Mathematik(-Didaktik) eine Übersicht. Auch semiotische Betrachtungen (Hoffmann 2005) sowie diskursive Studien (Sfard 2008) basieren auf einem pragmatischen Bedeutungsbegriff. Dieser pragmatische Ansatz wird in Abschn. 3 zur Analyse von Prozessen des Strukturierens operationalisiert.

2.2 Die Individualität des Strukturierens eines algebraischen Ausdrucks

In diesem Abschnitt wird die Relevanz des Begriffs der Strukturierung für die Mathematikdidaktik dargelegt und untermauert.

In der gegenwärtig herrschenden Lehrmeinung wird Lernen als konstruktiver Prozess beschrieben (Gerstenmaier und Mandl 1994). Unsere Auffassungen sind folglich unsere eigenen subjektiven Konstruktionen. Mit diesen individuell unterschiedlichen Konstrukten interpretieren wir alles, was uns vorgelegt wird. Insbesondere lesen wir vorgelegte Zeichenreihen so, wie wir gelernt haben, sie aufzufassen. Aufgrund der Individualität der Auffassungen sind auch die vorgenommenen Strukturierungen individuell. Also stellt jede Person in einem gegebenen algebraischen Ausdruck eigene Bezüge her. Diese Bezüge unterscheiden sich nicht nur darin, welche Zeichen sie aufeinander beziehen, sondern vor allem auch in den Bedeutungen, die ihnen zugeschrieben werden.

Die beim Vorgang des Strukturierens konstruierte Bedeutung ist individuell verschieden. Daher ist ein Unterschied zu erwarten zwischen Strukturen (wie jene von Hoch und Dreyfus, Malle und Kieran) und den Auffassungen der Probanden von diesen Strukturen, also den Strukturierungen. Die vielfältigen Strukturierungen führen zur Vielfalt bei den Lern- und Denkwegen. Die Rekonstruktion solcher Lern- und Denkwege ist für den Algebraunterricht von äußerster Relevanz, denn Lernende strukturieren anders als Experten. Genau an dieser Andersartigkeit müssen Lehrpersonen anknüpfen können. Besonders unangemessene Strukturierungen, die gar zu falschen Umformungen führen können, muss eine Lehrperson so nachvollziehen können, dass sie die innere Logik des Vorgehens der Schülerin oder des Schülers erkennt. Erst dann kann die Lehrperson den Unterricht auf die Klasse anpassen, beispielsweise indem sie im Unterricht unangemessene Strukturierungen in Beziehung zu angemessenen setzt und so die unterschiedlichen Leseperspektiven sichtbar und einsehbar macht. Eine solche Vorstellung von Unterricht unterliegt beispielsweise dem Forschungsmodell der didaktischen Rekonstruktion (Kattmann und Gropengiesser 1996) oder dem Design didaktischer Strukturen im Sinne von Lijnse (1995) sowie dem didaktischen Modell des Dialogischen Lernens (Ruf und Gallin 1998). Umsetzungen dieser Ideen in der Mathematikdidaktik sind etwa für den Bereich der Funktionen in Lengnink (2005) beschrieben oder für den Dreisatz in Gallin (2008).

2.3 Relationen und Struktur(ierung)en

Algebraisches Umformen ist *das* Beispiel für rein symbolisches Manipulieren. Allerdings wird algebraisches Umformen äußerst unterschiedlich modelliert. In diesem Abschnitt wird erstens der semiotische Zugang zum Umformen vorgestellt. Zweitens wird dieser von anderen Ansätzen abgegrenzt. Als zentral wird sich dabei der Begriff der Relation erweisen.

Dieser Artikel folgt semiotischen Grundsätzen, wie sie in Dörfler (2006) und Hoffmann (2005) beschrieben sind. Ein algebraischer Ausdruck wie $2(x-4)+3(x-4)$ kann demnach als *Ikon* behandelt werden. Das heißt, er wird mit Blick auf die in ihm dargestellten Relationen interpretiert, etwa als Term mit zwei gleichen Klammern oder als Summe von zwei Produkten. Wird obiger Ausdruck hingegen als *Index* behandelt, dann wird er als das interpretiert, worauf er verweist: Beispielsweise kann eine Person obigen Ausdruck als Aufforderung zum Ausmultiplizieren begreifen, eine andere versteht ihn vielleicht als Stellvertreter für Zahlen. Die im Ausdruck vorkommenden Zeichen können schließlich als *Symbole* behandelt werden. Deren Gebrauch ist durch Konventionen geregelt, welche syntaktische Regeln des Termaufbaus oder auch Rechengesetze wie Assoziativität, Kommutativität und Distributivität umfassen.

Wer in einem algebraischen Ausdruck sowohl Ikonisches, als auch Indexikalisches und Symbolisches sieht, fasst ihn als *Diagramm* (Dörfler 2006) auf. Konsequenterweise ist algebraisches Umformen ein *diagrammatisches Denken*. Es ist ein Herstellen von Relationen in den algebraischen Ausdrücken und das Schließen auf Umformungen, basierend auf den hergestellten Relationen. In diesem Sinne untersucht die in Abschn. 4 und 5 vorgestellte Studie unterschiedliche Formen des diagrammatischen Denkens im Rahmen des Vereinfachens von Termen und Lösens von Gleichungen. Die dabei identifizierten Strukturierungen – Hoffmann (2005, S. 55) spricht von *relationalen Strukturen* – entsprechen den von den Personen hergestellten Relationen.

Dabei ist der Begriff der Relation breit gefasst. Er beschränkt sich nicht auf Rechenoperationen und die Relation der Gleichheit. Denn das würde zur Gleichsetzung von Struktur und Oberflächenstruktur führen, wie etwa in Ansätzen, die der klassischen künstlichen Intelligenz folgen (Matz 1982; Mayer 1982). Bei diesem Erklärungsansatz wird algebraisches Umformen im Wesentlichen ohne Rückgriff auf die Struktur(ierung) eines Ausdrucks beschrieben. Ein algebraischer Ausdruck wird intern direkt als Proposition repräsentiert durch eindeutige Kodierung der Oberflächenstruktur des Ausdrucks. Dabei kommen Relationszeichen einzig als Namen für Rechenoperationen wie „+“ und „−“ sowie des Gleichheitszeichens vor. Eine Umformung des Ausdrucks wird dann modelliert als Operation einer expliziten Regel auf der Proposition. Die Abfolge der Umformungen ist durch eine implementierte Strategie vorgegeben, wie etwa Mayer (1982) am Beispiel der Reduktionsstrategie sowie der Isolationsstrategie bei linearen Gleichungen zeigt. Konsequenterweise ist bei solchen Ansätzen der klassischen künstlichen Intelligenz der Begriff der Struktur(ierung) eines Terms oder einer Gleichung nahezu inexistent, da er nicht gebraucht wird. Einzig die Oberflächenstruktur spielt bei der Kodierung des Terms oder der Gleichung eine Rolle.

Der in diesem Artikel verwendete Begriff der Relation umfasst auch die Systemstruktur eines Ausdrucks. Im obigen Beispiel $2(x-4)+3(x-4)$ könnten sowohl die beiden Vorfaktoren 2 und 3 additiv aufeinander bezogen werden als auch die beiden gleichen Klammern. Dieser Bezug würde auf eine distributive Strukturierung führen und zum Ausklammern von $x-4$.

Der Begriff der Relation ist in diesem Artikel so weit gefasst, dass auch „geometrische“ Relationen berücksichtigt werden. Die „Geometrie“ (Fischer 1984) eines algebraischen Ausdrucks ist auch wichtig. Im obigen Beispiel scheint etwa die Bezeichnung „Vorfaktor“ nützlich zu sein. Sie hilft einer Person bei der Orientierung in der zweidimensionalen Anordnung eines algebraischen Ausdrucks. Entsprechende Fragen lauten: Was steht links, was rechts? Schau ich horizontal, vertikal oder sogar diagonal? Welche Zeichen stehen vorn, welche hinten, welche sind Vorfaktoren? Externe physikalische Eigenschaften wie etwa die zweidimensionale Anordnung der Zeichen und ihre Abstände sind relevant.

Empirische Befunde machen den Einfluss solch geometrischer Relationen sowohl bei der Oberflächen- als auch bei der Systemstruktur plausibel. Beispielsweise belegten Landy und Goldstone (2007b), dass grafische Eigenschaften das Umformen von Termen beeinflussen. Offenbar ist der Abstand zwischen den Symbolen wichtig. Ein Ausdruck wie „5+2 · 6“ wird signifikant anders als „5 + 2·6“ wahrgenommen. Die falsche Antwort 42 wird häufiger bei der zweiten als bei der ersten Darstellung provoziert (vgl. Malle (1993, S. 191) für ein gegenteiliges Resultat beim Term $(x{+}y\ \cdot\ z)\ \cdot\ u{-}v$). Kirshner (1989) zeigte zudem die Möglichkeit auf, dass die Frage der Hierarchie der Operationen rein visuell entschieden werden könnte. Denn in einem algebraischen Ausdruck gehören jene Terme zusammen, die näher beieinanderstehen. Und Übergeneralisierungen können mit dem Konstrukt der *visuellen Augenscheinlichkeit* (visual salience) erklärt, also auf einen fehlerhaften Umgang mit grafischen Eigenschaften der Darstellung des Ausdrucks zurückgeführt werden (Kirshner und Awtry 2004). Schließlich hat neuerdings auch die Expertiseforschung die Wichtigkeit der Geometrie der Terme erkannt. Zum Beispiel sprechen Kellman et al. (2009) von *wahrnehmungsorientiertem Lernen* (perceptual learning) selbst beim algebraischen Umformen. Offenbar scheint jemand mit einer hohen fachlichen Expertise rein visuell zwischen korrekten und inkorrekten Umformungen unterscheiden zu können – und nicht nur durch rationale Begründung mit Verweis auf Umformungsregeln. Aus diesem Grund schulten Kellman et al. (2009) gezielt Probanden zur Wahrnehmung der Korrektheit von Umformungen. Nach der Intervention formten die Probanden algebraische Ausdrücke signifikant korrekter um.

2.4 Strukturieren als impliziter Prozess

In diesem Abschnitt wird dargestellt, dass das Herstellen von Bezügen bzw. die Art und Weise, wie zwei Teile aufeinander bezogen werden sollen, *impliziten Normen* folgt. Solche impliziten Normen sind – typischerweise stillschweigend wirkende – fachliche Gepflogenheiten und regeln das mathematische Arbeiten.

Ein Beispiel, wo im Unterricht das Herstellen von Bezügen thematisiert wird, ist das kalkülorientierte Multiplizieren einer Klammer mit einem Faktor. Leitend ist hier die Distributivität $a(b + c) = ab + ac$. Im Unterrichtsalltag werden die Bezüge oftmals mit Pfeilen wie in Abb. 2 visualisiert.

Solche Pfeile und damit verbundene Sprechweisen legen fest, dass in Ausdrücken der Form $a(b + c)$ der Vorfaktor a erstens auf b und zweitens auf c bezogen werden soll und zwar in multiplikativer Weise. In diesem Sinne leiten die Pfeile den Blick. Wer die Bedeutung dieses Bezugs des Ausklammerns erfasst hat, weiß, *wie* in den entsprechenden Fällen die Teile korrekt und *wann* sie so aufeinander bezogen werden. Die Schwierigkeit beim Umgang mit dem Bezug liegt nun darin, dass wir

Abb. 2 Visualisierung von Bezügen bei der Distributivität mittels Pfeilen

$$a(b+c) = ab + ac$$

Menschen weder das Wie noch das Wann der Herstellung des Bezugs vollständig explizit machen können. Dass die Herstellung von Bezügen wie in Abb. 2 nur teilweise explizit gemacht werden kann, erfährt jede Lehrperson im Unterrichtsalltag und kann theoretisch untermauert werden.

Das Wie: Aus dem Wittgenstein'schen Regressargument (vgl. Brandom 2000) folgt, dass wir Menschen Regeln interpretieren müssen, um sie anwenden zu können. Und jegliches Interpretieren folgt impliziten Normen. Das heißt, die korrekte Herstellung obigen Bezugs (Abb. 2) kann nicht mit endlich vielen Worten so beschrieben werden, dass ihre Anwendung für uns eindeutig wird, insbesondere alle möglichen Fälle eingeschlossen sind. Wer es trotzdem versucht, wird aufgrund von unerwarteten Deutungen seiner Worte feststellen, dass weitere Angaben zu machen sind, was schließlich im Regress (also in der Notwendigkeit, immer noch mehr Angaben machen zu müssen) mündet. Im Unterricht äußert sich das so, dass Fehler – im Sinne von unintendierten Deutungen – eintreten. Beispielsweise wird obiger Bezug (Abb. 2) auch bei Ausdrücken der Form $a(b \cdot c)$ oder bei $\sin(b + c)$ hergestellt und führt dann auf $ab \cdot ac$ und $\sin(b) + \sin(c)$, denn typischerweise wird mit der Angabe von $a(b+c) = ab + ac$ nicht gesagt, dass das Pluszeichen eminent ist und dass a als Vor*faktor* zu verstehen ist. Auch ist für viele Schülerinnen und Schüler die Herstellung dieses Bezugs unklar, sobald Fälle wie $2(x + y + z)$ oder auch $(2 + x)(1 - x)$ auftreten.

Das Wann: Die Unterbestimmtheit der Anwendbarkeitsbedingungen führt dazu, dass implizite Normen regeln, wann obiger Bezug des Ausmultiplizierens herzustellen ist. Die Fälle, die für die Herstellung dieses Bezugs sprechen, lassen sich wiederum nicht mit endlich vielen Worten charakterisieren (Brandom 2000) – eine Einsicht, die sich etwa in der Berechnungstheorie darin spiegelt, dass die Beweisbarkeit arithmetischer Sätze nicht rekursiv entschieden werden kann. Sobald es darum geht, wann ein Bezug herzustellen ist, verlässt man typischerweise den Bereich des rekursiv Entscheidbaren. Das Wissen, wann ein bestimmter Bezug hergestellt werden soll, lässt sich daher nicht vollständig explizit machen. Das wird beispielsweise bei der Diskussion um angemessene Strukturierungen bei linearen Gleichungen sichtbar. Bei linearen Gleichungen wie $2(x + 1) + 8(x + 2) = 10$ beziehen Experten die 2 auf x und 1, die 8 auf x und 2. Doch schon bei einer linearen Gleichung wie $2(x + 1) + 8(x + 1) = 10$ beziehen die Experten die 2 auf die 8 und die beiden Klammern aufeinander. In diesem Sinne lässt sich nicht explizit regeln, wann die Herstellung eines bestimmten Bezugs im Allgemeinen optimal ist.

3 Die individuelle Bedeutung eines hergestellten Bezugs

In diesem Abschnitt werden Instrumente von Sfard (2008), die sie zur Beschreibung des *Wie* (how) und *Wann* (when) des Gebrauchs mathematischer Begriffe einführte, vorgestellt und genutzt. Sfard führte diese Instrumente zur Beschreibung von *Vorgehensweisen* (routines) ein. In dieser Arbeit werden sie übertragen auf die Beschreibung des Strukturierens von Termen und Gleichungen. So gelingt es schließlich, die individuelle Bedeutung eines hergestellten Bezugs in einem algebraischen Ausdruck zu rekonstruieren und darzustellen.

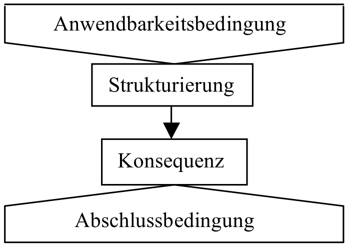
3.1 Anwendbarkeits- und Abschlussbedingungen, Strukturierungen und Konsequenzen

Die individuelle Bedeutung eines algebraischen Ausdrucks für eine Person entspricht gemäß den Überlegungen in Abschn. 2 der Art und Weise, wann diese Person den Ausdruck wie strukturiert. Zur Beschreibung dieser Bedeutung müssen also Angaben über das Wann und das Wie des Gebrauchs von Strukturen gemacht werden.

Zur Illustration sei die Gleichung $7(16+3x)=100-3(16+3x)$[1] diskutiert. Wird diese Gleichung von einer Person strukturiert, hängen die hergestellten Bezüge von ihren mathematischen Erfahrungen und Vorstellungen ab sowie vom Kontext. Dabei umfasst der Kontext sowohl die Situation, in der die Aufgabe gestellt wird, als auch Überlegungen, welche die Person eventuell schon zu dieser Gleichung anstellte. Zum Beispiel ist eine Person vorstellbar, die einen Bezug zwischen den beiden gleichen Klammern herstellt mit der Absicht, diese (fälschlicherweise) wegzustreichen, da sie auf beiden Seiten vorkommen. Dafür sind mehrere Gründe denkbar. Gut möglich, dass ihr die Gleichung als zu lang erscheint und sie ihres Erachtens durch das Wegstreichen der gleichen Klammern optisch übersichtlicher wird. Möglich wäre auch, dass die Person zuerst die Gleichung durch Ausmultiplizieren der Klammern korrekt gelöst hat und dann aufgefordert wird, einen zweiten Lösungsweg zu nennen. Dieser Kontext bedingt die Suche nach Alternativen. Vielleicht fällt ihr erst dann die Gleichheit der Klammern auf. Sie interpretiert die Frage nach einem zweiten Lösungsweg als Frage nach einem Trick, deutet daher das Minuszeichen als Vor- statt als Operationszeichen und fasst dadurch beide Seiten als Multiplikationen auf. Auf jeden Fall beschreiben beide Szenarien personale und kontextuelle Bedingungen, in denen Personen die beiden gleichen Klammern so aufeinander beziehen, dass ein Wegstreichen resultiert. Solche Bedingungen werden in dem vorliegenden Artikel als *Anwendbarkeitsbedingungen* bzw. *Eröffnungsbedingungen* (applicability conditions bzw. opening conditions; Sfard 2008) bezeichnet (vgl. Abb. 3). Sie beschreiben, wann ein bestimmter Bezug hergestellt wird. Wesentlich ist, dass die Frage nach dem Wann zusätzlich davon abhängt, ob am hergestellten Bezug festgehalten oder ob er verworfen wird. Die dafür entscheidenden Bedingungen heißen *Abschlussbedingungen* (closing conditions; Sfard 2008). Es sei der Bezug zwischen den beiden gleichen Klammern in der Gleichung $7(16+3x)=100-3(16+3x)$ vor dem Hintergrund des Wegstreichens in Erinnerung gerufen. Vielleicht fällt einer Person nach der Entdeckung der Gleichheit der beiden Klammern das Minuszeichen auf der rechten Seite der Gleichung auf. Sie argumentiert, dass sich daher die Vorzeichen in den Klammern

[1] Diese Gleichung sowie die in Abschn. 3.1 und 3.2 skizzierten, von Probanden hergestellten Bezüge sind der Masterarbeit von Gwendolin Däppen, PH Zürich, entnommen.

Abb. 3 Beschreibung des Prozesses des Strukturierens



ändern und als Folge die Klammerinhalte verschieden sind. Diese Abschlussbedingung würde zu einem Verwerfen des Bezugs führen. Eine andere Abschlussbedingung gälte, wenn eine Person die Klammern wegstreicht, $7 = 100 - 3$ erhält und den Bezug ebenfalls verwirft, weil sonst die Unbekannte x wegfallen und sie nicht mehr ein Resultat der Form $x = \ldots$ erhalten würde, das heißt, nicht mehr nach x auflösen könnte.

Allgemein entsprechen Anwendbarkeits- und Abschlussbedingungen den Auffassungen einer Person, die sie von jenen impliziten Normen (metarules; ebd.) hat, welche darüber entscheiden, wann (in welcher Situation) ein bestimmter Bezug angemessen ist. Diese Bedingungen umfassen die vorgelegte Gleichung, die Erfahrungen sowie das Wissen und Können der Person und die Umstände, unter denen die Gleichung gelöst werden muss. Im Speziellen entsprechen Anwendbarkeitsbedingungen den Auffassungen, wann ein bestimmter Bezug hergestellt werden soll, und die Abschlussbedingungen den Auffassungen, wann an einem hergestellten Bezug festgehalten werden soll oder nicht. Die Anwendbarkeitsbedingung führt zu einem bestimmten Bezug und die Abschlussbedingung bestimmt, ob er akzeptiert oder verworfen werden soll.

Die Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung beantwortet die Frage nach dem Wann des Bezugs; die Strukturierung beantwortet das Wie. Eine *Strukturierung* ist eine Auffassung eines Terms oder einer Gleichung als *Relation* (Bezug). Sie besagt, *welche* einzelnen Teilterme des Terms oder der Gleichung *wie* aufeinander bezogen sind. Die Strukturierung besteht somit aus den hergestellten Bezügen. Ein Beispiel in obiger Gleichung $7(16+3x) = 100-3(16+3x)$ sei der Bezug zwischen den beiden gleichen Klammern, um sie wegzustreichen. Denkbar ist auch, die 7 auf die linke Klammer $16 + 3x$ sowie die 3 auf die rechte Klammer $16 + 3x$ operativ aufeinander zu beziehen, mit dem Ziel des Ausmultiplizierens.

Schließlich impliziert die Strukturierung *Konsequenzen* (Folgen), auf die aus den hergestellten Bezügen geschlossen werden. Sie manifestieren sich beispielsweise als Umformungen oder in weiteren Bezügen und erlauben die Beurteilung davon, inwiefern die Abschlussbedingungen erfüllt sind oder nicht. Nochmals sei an $7(16 + 3x) = 100 - 3(16 + 3x)$ erinnert und an den Bezug zwischen den beiden gleichen Klammern, der hergestellt wird, um sie wegzustreichen. Eine Person kann daraus – wie oben erwähnt – auf $7 = 100 - 3$ schließen. Eine andere Konsequenz wäre, dass eine Person aufgrund des Streichens der Klammern auf das Minuszeichen aufmerksam wird und sich Gedanken über die Verrechnung dieses Minuszeichens mit der Klammer macht.

Abschließend skizziere ich meine Operationalisierung der Begriffe Anwendbarkeitsbedingung, Strukturierung, Konsequenz und Abschlussbedingung. Die Funktion der Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung ist die Explizierung der Logik, welche den von Personen vorgenommenen Strukturierungen innewohnt. Eine Strukturierung wird nachvollziehbar, sobald der Grund ihrer Herstellung explizit gemacht ist. Ein solcher Grund ist typischerweise nur durch die „Vorgeschichte" der Strukturierung verstehbar. Was führte eine Person dazu, genau diese Strukturierung vorzunehmen und nicht eine andere? Diese Leitfrage liegt meiner Operationalisierung der Anwendbarkeitsbedingung zugrunde. Diese besteht erstens in der Beschreibung davon, was eine Person machte und dachte, bis sie die Strukturierung vorgenommen hatte, und zweitens in Antworten auf Fragen wie: Welche Absicht verfolgte die Person mit ihrer Strukturierung? Warum hat sie gerade diese Strukturierung und nicht eine andere vorgenommen? Macht sie das immer so? Die operationalisierte Anwendbarkeitsbedingung besteht somit in der Beschreibung und Erklärung der Chronologie der Strukturierung – aus Sicht der Person, die strukturierte. Beide Teile wurden im Rahmen von Interviews erhoben, vgl. Abschn. 4. Die Anwendbarkeitsbedingung ist der eine Teil des Wann. Der andere Teil, die Abschlussbedingung, gliedert sich wiederum in Beschreibung und Erklärung davon, ob und warum die Person an der Strukturierung festgehalten hat oder nicht: Welche Folgehandlungen zeigte die Person? Wie hat sie diese beurteilt? Antworten darauf entsprechen der operationalisierten Anwendbarkeitsbedingung. Die Konsequenz sowie die Strukturierung werden direkt operationalisiert, und zwar die Konsequenz als Folgehandlungen (und deren Auffassungen) und die Strukturierung als Relation zwischen Teilen des Ausdrucks.

3.2 Verfahrenbasiertes und verfahrenbildendes Strukturieren

Beim Lösen von Gleichungen und Vereinfachen von Termen sind *Verfahren* wichtig. In Anlehnung an Star et al. (2005) wird im vorliegenden Artikel von einem Verfahren gesprochen, wenn es sich um einen explizierbaren Algorithmus handelt, der zur Lösung von Problemen eines bestimmten Typs führt. Diese Arbeitsdefinition hat sich bei der Auswertung empirischer Daten als ausreichend präzis erwiesen. In diesem Abschnitt wird die Rolle von Verfahren bei der Konstruktion von Bedeutung geklärt.

Grundsätzlich stehen zwei Konstruktionsweisen von Bedeutung beim Lösen einer Gleichung einander gegenüber. Im ersten Fall spreche ich von *verfahrenbasiertem* und im zweiten von *verfahrenbildendem* Strukturieren. Beim verfahrenbasierten Strukturieren wird aufgrund eines spezifischen Merkmals ein Verfahren an den algebraischen Ausdruck herangetragen. Dieses Verfahren leitet das Strukturieren des Ausdrucks, das heißt, man hat eine Vorstellung davon, welche Bezüge herzustellen sind, und stellt diese dann her. Die Bedeutung des Ausdrucks wird mit der Anwendung des Verfahrens gleichgesetzt. Beim verfahrenbildenden Strukturieren liegt ein solches eindeutiges Verfahren nicht vor. Vielmehr werden Bezüge hergestellt, aus denen dann allenfalls ein Verfahren oder eine Umformung generiert wird. Selbstverständlich ist die Unterteilung in verfahrenbasiertes und verfahrenbildendes Strukturieren idealtypisch. Trotzdem ist diese Unterteilung geeignet, um die hergestellten Strukturierungen zu beschreiben. Denn es gibt immer wieder Phasen während des Strukturierens, bei denen entweder verfahrenbasierte oder verfahrenbildende Prozesse dominieren.

Als Beispiel greife ich nochmals die Gleichung $7(16+3x) = 100 - 3(16+3x)$ auf. Typischerweise strukturierten die befragten Personen zuerst verfahrenbasiert und erst als Antwort auf die Frage nach einem alternativen Lösungsweg verfahrenbildend. Eine Schülerin beispielsweise schaute zuerst auf die „Klammern" und dann auf „das Minus vor dem Bruch". (Mit „Bruch" meinte sie $3(16+3x)$.) Diese Merkmale leiteten vorerst ihr Strukturieren. Sie bezog die Vorfaktoren auf die einzelnen Summanden in der Klammer sowie das Minuszeichen auf der rechten Seite auf das Pluszeichen in der Klammer mit dem Hinweis, dass „sich das hier drin dreht", allesamt verfahrenbasierte Bezüge. Erst auf die Bitte, einen anderen Lösungsweg vorzuschlagen, änderte sie die Perspektive und stellte verfahrenbildende Bezüge her. Beispielsweise bezog sie die beiden gleichen Klammern aufeinander, verwarf aber das damit verbundene (inkorrekte) „Kürzen [...] wegen dem Minus hier". Sie bezog einzelne Summanden aufeinander, etwa die 100 auf $7(16+3x)$, verwarf das damit verbundene „Rübernehmen" wieder und entdeckte so den additiven Bezug zwischen $-3(16+3x)$ und $7(16+3x)$.

Die Unterteilung in verfahrenbasiertes und verfahrenbildendes Strukturieren ist ähnlich zu den *absteigenden* (top-down) und *aufsteigenden* (bottom-up, Guski 2000, S. 68) Konstruktionsprozessen einer Problemrepräsentation beim Lesen von Texten allgemein (Ballstaedt et al. 1981), beim Lesen einer physikalischen Textaufgabe (Chi et al. 1981) oder eines mathematischen Problems (Schoenfeld und Herrmann 1982) zu sehen. Bei diesen Konstruktionen wird ein mentales Modell erzeugt unter Nutzung personaler Bedingungen wie Vorwissen und Erfahrung (absteigende Prozesse) sowie der Nutzung kontextueller Bedingungen wie des vorgelegten Texts (aufsteigende Prozesse).

4 Wie untersucht man empirisch die Herstellung von Bezügen? – Ein Beispiel

Nun ergibt sich folgende Forschungsfrage: Welche Bezüge stellen Personen in Termen und Gleichungen her? Insbesondere interessiert, wie sich das Herstellen von Bezügen in der mathematischen Praxis äußert. Daher spezifiziert sich die Frage auf die Art und Weise des Herstellens von Bezügen: Gibt es unterschiedliche Ebenen? Dazu liegen meines Wissens keine empirischen Studien vor. Also dient eine entsprechende Untersuchung der Exploration und Hypothesenbildung. In diesem Abschnitt wird an einem konkreten Beispiel (Rüede submitted) eine mögliche Methodik vorgestellt und diskutiert.

Die Methode muss Antworten auf folgende Fragen ermöglichen: Welche Vorstellungen aktivieren Personen aufgrund welcher Beobachtungen beim Lesen algebraischer Ausdrücke? Welche Strukturen (Bezüge) resultieren daraus? Welche Konsequenzen ziehen sie? Wie beurteilen sie diese? Solche Fragen legen verbale Daten nahe. Denkbar sind Interviews, das Filmen der Personen beim gemeinsamen Lösen von Aufgaben, lautes Denken zusammen mit dem Messen von Augenbewegungen etc. In Anbetracht dessen, dass die oben formulierte Forschungsfrage erstmals im Detail untersucht wird, fiel die Wahl auf Interviews. Denn diese Methode ermöglicht durch gezieltes Nachfragen ein umfassendes Explorieren des Herstellens der Bezüge.

Die hier beschriebene Methode zur Untersuchung der Frage nach den hergestellten Bezügen orientiert sich stark an Chi et al. (1981). Diese Forscher untersuchten, wie

Experten und Novizen während des Lesens von Physikaufgaben die Problemrepräsentation generieren. Analog dazu frage ich in meiner Studie danach, welche Bezüge Experten und Novizen beim Anschauen eines vorgelegten algebraischen Ausdrucks herstellen. Chi et al. (1981) benutzten sowohl ein Sortierverfahren (Gruppieren von Gleichungen nach ähnlichen Vorgehensweisen beim Lösen) als auch Interviewtechniken. Ebenso habe ich in einer früheren Studie (Rüede 2009) ein solches Sortierverfahren angewendet. Die Resultate meiner Studie (2009) deuteten darauf hin, dass Novizen im Unterschied zu Experten zur Herstellung von Bezügen tendieren, die sich an syntaktischen Merkmalen – also eher an Oberflächenmerkmalen – orientieren. Wie in Chi et al. (1981) schon beschrieben, durfte davon ausgegangen werden, dass mit Interviews diese Resultate nicht nur repliziert, sondern umfassender ergründet werden können.

Um die befragten Personen zu zwingen, den vorgelegten Ausdruck anzuschauen, über ihre im vorgelegten Ausdruck hergestellten Bezüge zu sprechen und diesen nicht einfach umzuformen, wurde erstens analog zu Chi et al. (1981) in den Interviews die Benutzung von Papier und Bleistift untersagt. Zweitens wurden gezielt algebraische Ausdrücke konstruiert, die ein genaues Anschauen erfordern. Der Verzicht auf Papier und Bleistift führt zu einem ähnlichen Anschauen wie bei einem Sortierverfahren. Die Interpretation des vorgelegten Ausdrucks in der Form der hergestellten Bezüge ist dabei wichtig und genau diese waren Untersuchungsgegenstand.

In einem Punkt unterscheiden sich die hier durchgeführten Interviews allerdings von jenen in Chi et al. (1981). Jene Forscher haben die Probanden mehrheitlich (aber nicht nur) aufgefordert, laut zu denken. In der hier präsentierten Studie wurde hingegen mit Introspektion nach – und nicht während – dem Herstellen von Bezügen gearbeitet. Den Probanden wurde jeweils Zeit gegeben, den vorgelegten Ausdruck in Ruhe anzuschauen, bevor sie interviewt wurden. Auf der einen Seite sind solche Rekonstruktionen von Erinnerungen mit Problemen behaftet, denn niemand ist sicher, ob die Probanden die während des Anschauens des algebraischen Ausdrucks gemachten Beobachtungen und Überlegungen korrekt wiedergeben (Ericsson 2006). Auf der anderen Seite beeinflusst lautes Denken während des Anschauens das Herstellen der Bezüge. Weil ich die Authentizität der Situation als wichtig erachtete, konnten die Probanden den Ausdruck jeweils beliebig lange anschauen, bevor sie dazu befragt wurden.

4.1 Probanden, Auswahl der Terme und Gleichungen, Ablauf der Interviews

Die Stichprobe wurde möglichst vielfältig angesetzt. Denn die Charakterisierung des Einzelnen sollte durch Abgrenzung von und Vergleich mit dem Anderen geschärft werden. Aus diesem Grund wurden zwei verschiedene Probanden-Gruppen untersucht, 12 Novizen und 12 Experten.

Die Novizen (6 weiblich, 6 männlich) waren 15- bis 17-jährig und im 9. oder 10. Schuljahr. Sie hatten im Schnitt schon zwei bis drei Jahre Algebraunterricht besucht und Terme, lineare Gleichungen, Faktorisieren von Polynomen, Vereinfachen von Bruchtermen und Lösen von Bruchtermgleichungen behandelt. Als Schultyp wurden Schweizer Gymnasien ausgewählt. Diese bereiten vorwiegend auf ein universitäres Studium vor und betonen daher die Algebra stark. Drei verschiedene Gymnasien wurden bestimmt. Zwei Novizen belegten den musischen Schwerpunkt, vier den

Schwerpunkt in Wirtschaft und Recht und sechs den mathematischen Schwerpunkt. Alle Novizen hatten im Mathematikunterricht Prüfungen zum Thema Bruchterme und Bruchtermgleichungen abgelegt. Gemäß ihren Mathematiklehrpersonen hatten dabei vier der ausgewählten Novizen ungenügende bis knapp genügende Noten erzielt, vier mittlere Noten und die restlichen vier exzellente Noten. Die Teilnahme am Interview war freiwillig.

Die Experten waren 12 Schweizer Mathematiklehrpersonen am Gymnasium (1 weiblich, 11 männlich). Sie besaßen alle ein Universitätsdiplom in Mathematik, ein Lehrdiplom in Mathematik und mindestens fünfjährige Unterrichtserfahrung am Gymnasium. Darüber hinaus verfügten sie über Zusatzqualifikationen als Mathematikdidaktikdozenten (4), hatten promoviert (2), waren Lehrbuchautoren (1) oder sie waren in die berufspraktische Ausbildung der Lehramtsstudierenden involviert (5). Die Teilnahme am Interview war freiwillig.

Für die Interviews wurden Aufgaben konstruiert, drei zu vereinfachende Terme und vier zu lösende Gleichungen. Weil die hergestellten Bezüge vom Typ des algebraischen Ausdrucks abhängig sind, wurde eine spezifische Klasse von Termen und Gleichungen ausgewählt. Die Wahl fiel auf Bruchterme und Bruchtermgleichungen, und zwar aus drei Gründen. Erstens sind in solchen „zweidimensionalen" Ausdrücken sowohl horizontale als auch vertikale sowie diagonale Bezüge möglich. Das Spektrum der hergestellten Bezüge ist also groß. Zweitens sollten den Probanden keine lapidaren Ausdrücke wie etwa $19 + 2x = 3$ vorgelegt werden, sondern solche, wo Strukturierungsarbeit wesentlich und die Auswertung folglich ertragreich ist. Drittens sind Bruchterme und Bruchtermgleichungen mit Standardverfahren verbunden. Die Addition von Bruchtermen ruft beispielsweise das Gleichnamigmachen der Nenner hervor oder eine Bruchtermgleichung das Wegmultiplizieren der Nenner. Es ist daher einfach, algebraische Ausdrücke zu konstruieren, die auf den ersten Blick ein Standardverfahren evozieren, das aber mühsam wird und daher eines zweiten Blicks bedarf, der dann auf einen simplen Trick führt. Die sieben konstruierten Ausdrücke sind daher artifiziell (vgl. Abschn. 5 für ein Beispiel und Rüede (submitted) für alle sieben Ausdrücke). Die Leitlinie beim Konstruieren war einzig und allein die Absicht, sowohl bei den Novizen als auch bei den Experten Situationen zu erzeugen, in denen sie auch verfahrenbildende und nicht nur verfahrenbasierte Bezüge herzustellen hatten. Dies war mit der Erwartung verbunden, dass verfahrenbildende Bezüge ergiebiger in der Auswertung sind. Die vorgelegten Ausdrücke repräsentieren also keineswegs den Schulstoff bei Bruchtermen und Bruchtermgleichungen.

Die so konstruierten sieben Ausdrücke wurden dann Gegenstand der Interviews. Zu Beginn des halb strukturierten Interviews wurde der Proband über den Interviewverlauf und über Rahmenbedingungen informiert wie das Verbot jeglicher Hilfsmittel oder die beliebig lange Nachdenkzeit. Nach den Erklärungen wurde der erste Bruchterm vorgelegt mit der Aufforderung, sich eine vereinfachende Umformung zu überlegen. Die erfassten Bedenkzeiten lagen zwischen etwa zwei Sekunden und zwei Minuten. Nachdem der Proband eine Umformung vorgeschlagen hatte, wurden spezifische Fragen gestellt, um all die Gedanken und Beobachtungen, die während der Bedenkzeit wichtig waren, gemeinsam zu rekonstruieren. Wenn nötig, wurde der Proband auch gebeten, seine vorgeschlagene Umformung weiterzuverfolgen – um zum Beispiel Auskunft über etwaige Abschlussbedingungen zu erhalten. Dann folgte der zweite und dritte Bruchterm. Danach wurden die vier Bruchtermgleichungen ausgegeben, wobei hier die Frage nach einer gewinnbringenden Umformung gestellt wurde. Im Schnitt dauerte ein Interview etwa 50 Minuten.

4.2 Auswertung

Die Auswertung folgte grundsätzlich der zusammenfassenden Inhaltsanalyse (Mayring 2003, S. 59–76) und nutzte für die konkrete Ausführung entsprechende Techniken der didaktischen Rekonstruktion, wie etwa in Gropengießer (2007, S. 142–147) beschrieben. Im ersten Schritt wurden alle Passagen transkribiert. Weil die Interviews in Schriftdeutsch durchgeführt wurden, mussten keine Dialekte bereinigt werden. Satzbaufehler wurden übernommen. Das so entstandene Wortprotokoll wurde gemäß den Transkriptionsregeln (ebd., S. 147) kommentiert. Zur Illustration sind Auszüge aus dem Transkript gegeben, die schließlich zur Abb. 4 (im Abschn. 5) führten:

⋮

I Wie haben Sie die Gleichung gelesen?
S Zuerst habe ich die Klammer angeschaut. Dann $\frac{1}{4} - \frac{x}{4}$. Habe überlegt, ob ich die 4 wegstreichen könnte. Dachte, Ja, so – – –
I Was würde dann stehen, wenn Sie die 4 wegstreichen könnten?
S $1 - x$.
I Alleine. Ja.
S Aber das geht ja nicht, weil das in Viertel aufgeteilt ist und die x eine beliebige Zahl sein kann. Und das sind dann so viele Anzahl Viertel und nicht so viele Anzahl Ganze. Das wäre dann falsch. Habe gedacht, Nein, kann man nicht, lasse ich mal stehen.

⋮

I Suchen Sie eigentlich immer nach Gleichheiten innerhalb einer Gleichung?
S Ja *(lacht)*.
I Ist das immer so?
S Ja.
I Das können irgendwelche Gleichheiten sein?
S Ja.
I Haben Sie auch eine Strategie, die Sie verfolgen mit diesen Gleichheiten?
S Ja, das Wegstreichen. Aber das ist immer so eine heikle Sache.

⋮

I Und warum wollen Sie es so machen?
S Weil es dann einfacher wird.

⋮

Entgegen der Anleitung in Groppengießer (2007) wurden die Transkripte im zweiten Schritt geordnet und erst danach redigiert. Einerseits bestand dieses Ordnen im Identifizieren der wesentlichen Bezüge. Pro Proband und Aufgabe wurden im Schnitt zwei bis drei Bezüge als zentral identifiziert. Andererseits wurden die Transkripte „aufgebrochen“: Für jeden zentralen Bezug wurde nach Informationen über die Anwendbarkeitsbedingung, die Strukturierung, die Konsequenz und die Abschlussbedingung gesucht. Das führte zu einem Umstellen der Transkripte so, dass für jeden

Bezug das Schema in Abb. 3 mit entsprechenden Passagen so weit wie möglich ausgefüllt werden konnte (vgl. Abschn. 5). Dabei wurden gewisse Passagen gegebenenfalls mehreren Stellen zugeordnet. Beispielsweise waren einzelne Passagen relevant für mehr als einen Bezug oder sie waren innerhalb eines Bezugs etwa sowohl für die Konsequenz als auch für die Abschlussbedingung wichtig. Zu erwähnen ist, dass dieser Schritt des Ordnens ein Interpretieren ist. Nicht nur das Zuordnen der Passagen zu den einzelnen Stellen ist eine Frage der Interpretation, sondern auch das Einteilen in wichtige und unwichtige Information. Denn bestimmte Interviewausschnitte wurden keinem Bezug zugeordnet. Zum Beispiel machten einige Experten Angaben zum Definitionsbereich der vorgelegten Ausdrücke. Die entsprechenden Aussagen wurden beim Ordnen aber nur dann berücksichtigt, wenn sie explizit das Strukturieren im Hinblick auf das Umformen beeinflussten.

Der dritte Schritt war das Redigieren der zugeordneten Passagen. Füllwörter und -sätze sowie unmittelbare Wiederholungen wurden gestrichen. Die im Wechselspiel zwischen interviewende und interviewte Person entstandenen Passagen wurden in eigenständige Aussagen der interviewten Person transformiert. Diese Aussagen wurden dann grammatisch geglättet und, falls bedeutungsgleich, gebündelt. Dabei wurde auf einen authentischen Wortlaut geachtet. Die so erhaltenen Anwendbarkeitsbedingungen, Strukturen, Konsequenzen und Abschlussbedingungen für jeden zentralen Bezug bildeten die Basis der Kategorienbildung (Abb. 4 bis 7). Obige Interviewausschnitte führten beispielsweise zur Abb. 4. Eine solche Abbildung entspricht den *geordneten und redigierten Aussagen* im Sinne von Gropengießer (2007) und ist im Abschn. 5 auch so bezeichnet.

Im vierten Schritt wurden die von den Novizen und Experten verwendeten Verfahren identifiziert (vgl. Abschn. 5). Als Verfahren wurden nur jene Vorgehensweisen bezeichnet, die explizit von den interviewten Personen als solche bezeichnet wurden. So konnten die einzelnen Bezüge als verfahrenbasiert respektive verfahrenbildend kategorisiert werden. Mögliche implizite Vorgehensweisen wurden nicht als Verfahren behandelt, obwohl gerade Fehler teilweise auf algorithmisierbaren, falschen Prozeduren beruhen. Die Interviews waren aber nicht auf die Klärung dieser Frage ausgerichtet.

Der fünfte Schritt war die induktive Bildung von Kategorien des Herstellens von Bezügen. Dazu wurden typische verfahrenbildende Bezüge ausgelesen, die als Ankerbeispiele dienten und deren Merkmale explizit gemacht wurden. Vorläufige Kategorien entstanden. Danach wurde untersucht, inwiefern die restlichen verfahrenbildenden Bezüge diesen Kategorien zugeordnet werden können, wodurch die vorläufigen Kategorien teilweise revidiert werden mussten. Dieses Wechselspiel zwischen der Bildung von Kategorien und der Zuordnung der Bezüge dauerte so lange, bis alle verfahrenbildenden Bezüge zugeordnet werden konnten und die Kategorien die Menge der Bezüge möglichst „angemessen“ charakterisierte. Zur Einschätzung dieser Angemessenheit wurde das Kategoriensystem mit bestehenden mathematikdidaktischen Theorien zum algebraischen Umformen verglichen. Das Resultat in Form von vier Kategorien ist im Abschn. 5 vorgestellt. Erwähnenswert ist, dass die verfahrenbasierten Bezüge für die Kategorienbildung wenig ergiebig waren. Sie waren wie erwartet schwieriger in einzelne Kategorien aufzuteilen. Die Verfahren gaben so stark vor, wie die Teile eines Ausdrucks aufeinander zu beziehen sind, dass eine qualitative Unterscheidung der entsprechenden Bezüge aufgrund der verbalen Daten nicht immer eindeutig durchzuführen war. Das war aber nicht problematisch, weil das Ziel der Studie die Kategorienbildung und nicht die vollständige Kategorisierung der Bezüge war.

5 Vier Ebenen des Herstellens von Bezügen

Bei der erfassten Ausprägung des Herstellens von Bezügen konnten vier verschiedene Ebenen empirisch identifiziert werden. Diese werden in diesem Abschnitt zuerst exemplarisch vorgestellt und dann systematisch charakterisiert. Als Beispiel dient die Bruchtermgleichung

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{x}{4}\right) \cdot \frac{x}{4x+1} + 4 \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{4x}{x-4}.$$

Diese Bruchtermgleichung wurde Novizen und Experten im Rahmen von Interviews, wie sie in Abschn. 4 beschrieben sind, vorgelegt. Kennzeichnend für obige Bruchtermgleichung ist, dass sie leicht zu lösen ist, sobald die Gleichheit der beiden Summanden $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ und $\frac{4x}{x-4}$ erkannt wird. Um aber einen entsprechenden Bezug herstellen zu können, mussten sich die Probanden typischerweise vom Wegmultiplizieren der Nenner lösen. Daher erlaubte diese Gleichung die Rekonstruktion verfahrenbildender Bezüge. Auf diese wird im Untenstehenden fokussiert.

Im Rahmen der Auswertung wurden bei den Bruchtermgleichungen folgende Verfahren identifiziert: Wegmultiplikation der Nenner, Kreuzmultiplikation bei Gleichungen wie $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, Vereinfachung (z. B. intern kürzen, zusammenfassen) der Gleichung von links nach rechts, Wegsubtraktion von $\frac{bB}{C}$ bei Gleichungen wie $A + b \cdot \frac{B}{C} = \frac{bB}{C}$ (zwei Novizen kannten dieses Verfahren aus einer Unterrichtseinheit, die von mir zusammen mit ihrer Lehrperson konzipiert wurde und wo u. a. fünf solche Gleichungen vorgestellt wurden zur Diskussion des Anwendungsbereichs des Wegmultiplizierens der Nenner). Vermutlich hätten andere Gleichungen weitere oder andere Verfahren bedingt.

5.1 Novize11 (weiblich): Beispiel eines syntaktischen Bezugs

5.1.1 Geordnete und redigierte Aussagen

Novize11 strukturierte zuerst verfahrenbildend. In Abb. 4 sind die redigierten Interviewpassagen ihres ersten zentralen Bezugs gegeben.

Novize11 stellte anschließend einen weiteren verfahrenbildenden Bezug her, nämlich zwischen den gleichen Nennern $x - 4$. Die Gleichheit dieser Nenner brachte sie dann abschließend auf die Idee, den Hauptnenner zu bestimmen und die Gleichung mit diesem Hauptnenner zu multiplizieren. Diese Umformung schlug sie nach der Bedenkzeit vor.

Anwendbarkeitsbedingung: „Zuerst habe ich die Klammer angeschaut. Dann $\frac{1}{4} - \frac{x}{4}$. Habe überlegt, ob ich die 4 wegstreichen könnte.“ Ich suche zuerst immer nach Gleichem, „weil es dann einfacher wird.“ Meine Strategie ist das „Wegstreichen, aber das ist immer so eine heikle Sache.“

Strukturierung: Bezug zwischen den beiden gleichen Nennern.

Konsequenz: Wenn ich die beiden 4 wegstreichen würde, dann stände $1 - x$.

Abschlussbedingung: „Aber das geht ja nicht, weil das in Vierteln aufgeteilt ist und die x eine beliebige Zahl sein kann. Und das sind dann so viele Anzahl Viertel und nicht so viele Anzahl Ganze. Das wäre dann falsch. Habe gedacht, nein, kann man nicht, lasse ich mal stehen.“

Abb. 4 Anwendbarkeitsbedingung, Strukturierung, Konsequenz, Abschlussbedingung des von Novize11 hergestellten verfahrenbildenden Bezugs. Wendungen in Anführungs- und Schlusszeichen sind wortwörtliche Interviewpassagen, die anderen Wendungen sind Paraphrasierungen von Passagen

5.1.2 Kategorie

Novize11 bezog zuerst immer Gleiches aufeinander mit der Absicht einer Vereinfachung. Sie behandelte die algebraischen Ausdrücke ähnlich wie eine Analphabetin einen Schriftzug. Eine Analphabetin findet grafische Gemeinsamkeiten in Schriftzügen wichtig. Analog fokussierte Novize11 in den vorgelegten algebraischen Ausdrücken auf syntaktisch Gleiches. Daher nenne ich solche Bezüge *syntaktisch*. Gleiche Teile bildeten die Relata dieser Bezüge. Wie die Relata aufeinander bezogen wurden, orientierte sich jeweils an den Operationszeichen. Im obigen Fall stand ein Minuszeichen zwischen den beiden Relata. Novize11 deutete dies so, dass die gleichen Nenner weggestrichen werden könnten. Das Vereinfachen war bei Novize11 ein *optisches Einfachermachen*. Die Klammer erschien dann einfacher, weil sie weniger Zeichen enthielt.

Indem Novize11 sich die Konsequenz ihres Bezugs klarmachte, konnte sie über seine Angemessenheit entscheiden. Sie realisierte, dass in der Klammer nicht einfach $1 - x$ stehen kann, denn das wäre für sie etwas anderes als $1 - x$ Viertel. Dieser Gedanke führte sie zur Überzeugung, den syntaktischen Bezug zu verwerfen. Die in der Abschlussbedingung (Abb. 4) zitierte Passage dokumentiert eindrücklich dieses Ringen von Novize11 um die korrekten Regeln, nach denen algebraische Zeichen kombiniert werden dürfen. Sie bezieht die Teile aufeinander, um sich klarzumachen, welche Rechnung dahintersteht, oder mit den Worten von Kieran (1989), um welche Oberflächenstruktur es sich handelt. Ist sich Novize11 bei der Korrektheit eines Bezugs sicher, dann hält sie daran fest, andernfalls verwirft sie ihn.

Wichtig zu erwähnen ist, dass in diesem Fall das Herstellen der syntaktischen Bezüge seinen Sinn hatte. Denn erst nachdem Novize11 all ihre syntaktischen Bezüge verworfen hatte, konnte sie optisch zusammengehörige, nicht gleich aussehende Teile wie beispielsweise Brüche als Ganzheit behandeln. Diese Beobachtung wies sie schließlich auf das Wegmultiplizieren der Nenner hin.

Anwendbarkeitsbedingung: So konnte ich „nicht einfach die Brüche loswerden". „Dann bin ich [...] zur Klammer". Ich wollte „mal die Klammern auflösen". Denn „ich wüsste nicht, was ich mit den Zahlen hier drin sonst anfangen könnte. Weil ich hätte nirgends wirklich etwas, das gleich weg könnte, oder etwas, das man gleich irgendwie findet". Ich kann „diese Brüche nicht einfach so loswerden, also es ist nicht irgendwie ein Bruch, der mal irgendetwas mit etwas anderem zusammenpassen würde".

Strukturierung: „Also mehr einfach das mal das und das mal das."

Konsequenz: „Ich weiß einfach, dass es nachher irgendwie $16x$ geben wird." Die Klammer ist dann „aufgelöst".

Abschlussbedingung: „... dass die Klammer aufgelöst ist."

Abb. 5 Anwendbarkeitsbedingung, Strukturierung, Konsequenz, Abschlussbedingung des von Novize3 hergestellten verfahrenbildenden Bezugs. Wendungen in Anführungs- und Schlusszeichen sind wortwörtliche Interviewpassagen, die anderen Wendungen sind Paraphrasierungen von Passagen

5.2 Novize3 (weiblich): Beispiel eines operationalen Bezugs

5.2.1 Geordnete und redigierte Aussagen

Novize3 strukturierte zuerst verfahrenbasiert. In ihrer Klasse wurden Gleichungen dieses Typs diskutiert. Sie multiplizierte 4 mit $\frac{x}{x-4}$, um dann die beiden Brüche wegzusubtrahieren. Beim Multiplizieren unterlief ihr ein Fehler. Sie multiplizierte oben und unten mit 4 und konnte daher nicht wie erhofft die beiden Brüche wegstreichen. Daraufhin strukturierte sie verfahrenbildend, wie die redigierten Interviewpassagen in Abb. 5 belegen.

5.2.2 Kategorie

Ein *operationaler* Bezug dient der *Änderung* des Ausdrucks. Die Relata sind optisch zusammengehörige Bündel wie Brüche, Klammerausdrücke und Zahlen. Diese bezog Novize3 gemäß dem sie verbindenden Operationszeichen aufeinander.

Nachdem sie ihr Verfahren nicht ausführen konnte, wusste sie nicht, welche Teile sie im Weiteren aufeinander beziehen sollte. Aus diesem Grund fokussierte sie auf einzelne Operationen. Sie folgte der Hierarchie der Operationen, schaute somit das an, was zuerst ausgerechnet werden muss. In der Anwendbarkeitsbedingung ist beschrieben, dass sie zuerst die Klammer „auflösen" wollte. Weil sie die beiden Brüche aber nicht zu einem einzigen Bruch zusammenfassen konnte, sah sie nur die Möglichkeit des Ausmultiplizierens. Daher spiegelt der Bezug das Distributivgesetz $(a+b)c = ac + bc$, was Novize3 in der Aussage „das mal das und das mal das" zum Ausdruck brachte. Sie bezog also $\frac{1}{4}$ multiplikativ auf $\frac{x}{4x+1}$ und ebenso auf $\frac{x}{4}$. Die Konsequenz des Bezugs war für sie, dass im Nenner irgendwo $16x$ stehen und vor allem die Klammer nicht mehr vorkommen wird. Das „Auflösen" der Klammer war das Hauptziel.

Anwendbarkeitsbedingung: „Dann habe ich geschaut, ob man es anders machen kann. [...] Ich habe auch die 4 wieder raufgenommen zum x [...] und dann gesehen, dass sie gleich sind.“

Strukturierung: $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ auf der linken und $\frac{4x}{x-4}$ auf der rechten Seite sind gleich.

Konsequenz: Dann ist auf der linken Seite „eine Addition entstanden [...] und hier [auf der rechten Seite] wäre es wie auch 0 + und dann könnte man es auf beiden Seiten wegrechnen“.

Abschlussbedingung: „Dann konnte man bequem mit dem Nenner multiplizieren und es blieb einfach noch $x(1-x)=0$.“

Abb. 6 Anwendbarkeitsbedingung, Strukturierung, Konsequenz, Abschlussbedingung des von Novize2 hergestellten verfahrenbildenden Bezugs. Wendungen in Anführungs- und Schlusszeichen sind wortwörtliche Interviewpassagen, die anderen Wendungen sind Paraphrasierungen von Passagen

Dieser operationale Bezug diente nicht (in erster Linie) dem Lösen der Gleichung, sondern dem Ausführen einer Operation. Als Abschlussbedingung wirkte nicht ein Kriterium, das die Angemessenheit dieses Bezugs im Hinblick auf das Lösen der Gleichung einschätzt, sondern allein die Ausführbarkeit der Operation. Novize3 behandelte den operativen Bezug isoliert vom Rest der Gleichung. Sie wollte einfach etwas machen. Genau das ist der Zweck operationaler Bezüge beim verfahrenbildenden Strukturieren. Sfard (2008, S. 237) spricht in diesem Zusammenhang von „Handlungen, die Objekte ändern“.

5.3 Novize2 (weiblich): Beispiel eines strukturalen Bezugs erster Ordnung

5.3.1 Geordnete und redigierte Aussagen

Novize2 strukturierte zuerst verfahrenbasiert. Sie bezog die Nenner aufeinander, um den Hauptnenner zu bestimmen. Aufgrund der Verschiedenheit der Nenner verwarf sie diesen Bezug, es wäre ihr zu kompliziert geworden. Sie überlegte sich, ob man die Gleichung auch anders angehen könnte. Also strukturierte sie verfahrenbildend, wie die redigierten Interviewpassagen in Abb. 6 zeigen.

5.3.2 Kategorie

Charakterisierend für diesen Bezug ist, dass er zwei Sichtweisen verbindet. In gewissem Sinne arbeitete sich Novize2 beim Interpretieren „von innen nach außen“. Damit ist Folgendes gemeint: Novize2 fasste den Term $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ zuerst als Multiplikation auf. Das „Innere“ des Terms, also seine Oberflächenstruktur, war wichtig. Novize2 überlegte sich, wie sie diese Multiplikation ausführen konnte. So entdeckte sie die Gleichheit der beiden Terme links und rechts des Gleichheitszeichens. Diese bezog Novize2 als gleiche Brüche aufeinander. Dank diesem Vergleich konnte sie die Multiplikation als Produkt auffassen, das heißt, $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ auch von

„außen“ anschauen: Sie schaute, was auf dieses Produkt wirkt. Dadurch erkannte sie, dass $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ auch ein Summand ist. Das ist in obiger Konsequenz formuliert. Novize2 interpretierte also $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ zuerst gemäß seinem inneren Aufbau und erst danach gemäß seinen äußeren Verbindungen mit den restlichen Teilen der Gleichung.

Die Abschlussbedingung lässt sich bei Novize2 indirekt erschließen. Sie spricht von „bequem“ und „blieb einfach noch“. Das kann so interpretiert werden, dass sie den Gewinn des Bezugs für das Lösen der Gleichung erkannte.

Solche Bezüge nenne ich *struktural erster Ordnung*. Sie drücken eine *Umdeutung* aus. Demselben Teil des Ausdrucks wird eine weitere Bedeutung zugeschrieben. In der obigen Gleichung war für Novize2 bei $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ zuerst das Innere bedeutsam, die Eigenschaft „Multiplikation“ war wichtig. Danach war das Äußere dieses Teils wichtig, die Eigenschaft „Summand“ wurde erkannt.

Umdeutungsprozesse scheinen allgemein der Schlüssel zur Expertise im Strukturieren zu sein. Denn sie spielen auch in anderen Kontexten eine Rolle, beispielsweise beim Strukturieren von Punktfeldern (Söbbeke 2005). Die Autorin dokumentiert, wie es Kindern durch Umdeuten gelingt, Teile von Punktfeldern als Teile des Ganzen zu sehen.

5.4 Experte12 (männlich): Beispiel eines strukturalen Bezugs zweiter Ordnung

5.4.1 Geordnete und redigierte Aussagen

Experte12 stellte als Erstes einen verfahrenbildenden Bezug her. Dieser führte ihn gleich zur Lösung, was die redigierten Interviewpassagen in Abb. 7 dokumentieren.

Anwendbarkeitsbedingung: „Eigentlich addiere ich da zwei Brüche, das gibt einen dritten, und dann wird es immer mühsam, wenn ich das lösen sollte. Aber wenn ich noch ein Produkt hätte, das 0 wäre, könnte ich noch etwas anfangen. Dann versuche ich den da wegzubringen: $4 \cdot \frac{x}{x-4}$.“

Strukturierung: „Dann sehe ich, der [$4 \cdot \frac{x}{x-4}$] kommt da [rechts] genau exakt nochmals vor.“

Konsequenz: „Also subtrahieren wird den.“

Abschlussbedingung: „Wahrscheinlich habe ich an $A \cdot B$, an die Buchstaben [bei $A \cdot B = 0$] nicht gedacht. Aber in einem solchen Sinne, dass ich da [im ersten Teil der Gleichung] ein Produkt habe, schon. Vor allem das Pluszeichen stört, finde ich. [...] Und dann habe ich es probiert. Es hat funktioniert.“

Abb. 7 Anwendbarkeitsbedingung, Strukturierung, Konsequenz, Abschlussbedingung des von Experte12 hergestellten verfahrenbildenden Bezugs. Wendungen in Anführungs- und Schlusszeichen sind wortwörtliche Interviewpassagen, die anderen Wendungen sind Paraphrasierungen von Passagen

5.4.2 Kategorie

Was sich Novize2 mühsam erarbeiten musste, macht Experte12 von Beginn an: Er schaut den Term von außen nach innen an.[2] In der Anwendbarkeitsbedingung formuliert er seine erste Lesart der Gleichung als Addition zweier Brüche, die einen dritten ergeben. Diese Strukturierung ist vermutlich vor dem Hintergrund des Suchens nach einem gemeinsamen Nenner zu sehen. Experte12 schätzt dieses Vorgehen als langwierig ein und sucht daher nach einer Alternative. Er arbeitet sich weiter von außen nach innen und erkennt die Multiplikation im ersten Summanden. Er fasst die Möglichkeit eines Spezialfalls ins Auge. Vielleicht ließe sich irgendwie eine Gleichung vom Typ $A \cdot B = 0$ erzeugen. Aus diesem Grund bezieht er dann die beiden Summanden links und rechts des Gleichheitszeichens aufeinander. In der Abschlussbedingung ist indirekt ein Kriterium definiert, wann er an diesem Bezug festhalten würde. Nämlich dann, wenn die beiden Summanden gleich sind und in der Tat eine Gleichung vom Typ $A \cdot B = 0$ resultiert. Das bedeutet, Experte12 beurteilt den Bezug daran, wie elegant der sich daraus ergebende Lösungsweg ist.

Solche Bezüge nenne ich *strukturale Bezüge zweiter Ordnung*. Sie werden zur Entscheidung dessen hergestellt, welches Verfahren, das der Proband kennt, er ausführen soll. Wer also strukturale Bezüge zweiter Ordnung herzustellen vermag, weiß im Voraus um die vielfältigen angemessenen Bedeutungen der einzelnen Teile und um die entsprechenden Verfahren – und muss diese Verfahren nicht wie Novize11 durch Uminterpretation erst entdecken. Experte12 brauchte nur noch zu entscheiden, welche Bedeutung er zuweisen sollte. In diesem Sinne ist sein Herstellen der Bezüge ein *Klassifizieren* der Gleichung nach Lösungsverfahren. Daher wird von Bezügen zweiter Ordnung und nicht erster Ordnung gesprochen. Chi et al. (1981, S. 142) sprechen ganz analog von *Merkmalen zweiter Ordnung* (second-order features). Gemäß diesen Forschern identifizieren Experten beim Lesen von Physikaufgaben Merkmale zweiter Ordnung. Solche Merkmale kommen in den Physikaufgaben nicht explizit vor, vielmehr werden explizite Textstellen *als* solche Merkmale gelesen. Bei den Experten entscheiden diese Merkmale zweiter Ordnung, welche Problemdarstellung gewählt wird.

5.5 Fazit

Die vier Beispiele zeigen erstens, wie sich das Konstrukt des Herstellens von (verfahrenbildenden) Bezügen auffächert in die Tätigkeiten des optisch Einfachermachens, des Änderns, des Umdeutens und des Klassifizierens (vgl. Abb. 8).

Zweitens zeigen die Details der Beispiele, dass sich die Individualität des Strukturierens im Herstellen von unterschiedlichen Bezügen ausdrückt. Indem die Konstrukte von Abb. 3 zur Beschreibung der Bezüge verwendet werden, wird die (individuelle) Bedeutung dieser Bezüge sichtbar. Es wird deutlich, warum die einzelnen Probanden gerade so und nicht anders strukturieren. In diesem Artikel musste aus Platzgründen darauf verzichtet werden, die Vielfalt der erhobenen Bezüge aufzuzeigen. Nur Ankerbeispiele für die einzelnen Ebenen sind vorgestellt.

[2] Dies entspricht auch einem strukturalen Bezug zweiter Ordnung, doch der steht jetzt nicht zur Diskussion.

Syntaktische Bezüge herstellen	Operationale Bezüge herstellen	Strukturale Bezüge erster Ordnung herstellen	Strukturale Bezüge zweiter Ordnung herstellen
Den Ausdruck optisch einfacher machen	Den Ausdruck ändern	Den Ausdruck umdeuten	Den Ausdruck klassifizieren

Abb. 8 Vier Ebenen des Herstellens von Bezügen

Manche Fragen bleiben leider unbeantwortet. Wie stark hängen obige vier Ebenen (Abb. 8) von den vorgelegten Termen und Gleichungen ab? Gibt es weitere Ebenen? Repräsentieren diese Ebenen Stufen der Entwicklung, Fähigkeitsstufen oder unterschiedliche Typen von Bezügen? Diese Studie ist explorativ und kann darüber keine Auskunft geben. Weil aber letztere Frage Gegenstand von Folgestudien sein wird, seien an dieser Stelle ein paar Überlegungen darüber angestellt.

Die Auswertung der Interviews führte zur Hypothese, dass in Abb. 8 der Grad der Expertise von links nach rechts zunimmt. Insofern kann vermutet werden, dass die vier Ebenen der Abb. 8 mit Fähigkeiten, vielleicht auch Entwicklungen des Strukturierens zusammenhängen. Beispielsweise argumentiert Sfard (1991) in Anlehnung an Piaget, dass sich die Auffassungen von algebraischen Ausdrücken von *operationalen* hin zu *strukturalen* entwickeln: Lernende fassen algebraische Ausdrücke anfänglich als Prozesse auf und beginnen erst im Laufe der Zeit, diese als Objekte zu behandeln. In Sfard (2008) gelangt die Autorin zu ähnlichen – und allgemeineren – Resultaten, formuliert und begründet diese aber vor dem Hintergrund eines diskursiven Paradigmas: Zu Beginn eines mathematischen Lernprozesses vollziehen Lernende *Handlungsakte* (deeds), durch die Einführung in die mathematischen Gepflogenheiten führen sie danach erlernte Verfahren aus und verstehen diese als *Rituale* (rituale). Mit der Zeit entwickeln sie die Fähigkeit, mathematische Aussagen selbstständig zu formulieren, darüber *Explorationen* (explorations) anzustellen und so am fachlichen Diskurs teilzunehmen. Tatsächlich stehen links in Abb. 8 eher Handlungsakte, Rituale beziehungsweise operationale Auffassungen. Rechts stehen eher die strukturalen Auffassungen. Auch das Klassifizieren ist explorativ. Denn Experte12 stellt zuerst eine These auf, dass sich nämlich die Terme auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens aufheben. Anschließend prüft er diese. Insofern könnte eine Entwicklung bei Abb. 8 von links nach rechts vermutet werden. Allerdings liegt aktuell kein Modell vor, wie diese Entwicklung stattfinden könnte – außer, dass die Argumente von Sfard (1991, 2008) übernommen würden. Zudem sind Begriffsentwicklungen immer wesentlich vom konkreten Unterrichtsverlauf abhängig. Der gegenwärtige Unterricht in der Algebra wie auch der Arithmetik folgt nämlich gerade der Richtung vom Operationalen hin zum Strukturalen. Daher wäre die Hypothese – wenn überhaupt – vorsichtiger zu formulieren: In Abb. 8 sind von links nach rechts Fähigkeitsstufen angegeben.

Schließlich scheinen die Beispiele in den Abschn. 5.1 bis 5.4 zu bestätigen, dass beim Umformen algebraischer Ausdrücke auch geometrische Relationen relevant sind (Fischer 1984, Landy und Goldstone 2007a, 2007b).

– Novize11 machte den Ausdruck optisch einfacher, sie produzierte ein „einfacheres Bild“.

- Bei der Multiplikation von 4 mit dem Bruch $\frac{x}{x-4}$ rechnete Novize3 Zähler und Nenner mal 4. Vermutlich evozierte hier die Position der 4 auf der Höhe des Bruchstrichs diesen Fehler. Wäre die 4 auf gleicher Höhe wie der Zähler gestanden, hätte sie wohl nur den Zähler mit 4 multipliziert.
- Novize2 spricht davon, dass sie bei $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ die 4 „raufnimmt". Das gleicht einer geometrischen Verschiebung von 4 in der Ebene.
- Auch die Bezüge von Experte12 enthalten geometrische Aspekte. Er fasst die Gleichung als $A + B = C$ auf. Diese zweidimensionale Anordnung teilt er jeweils in zwei Hälften. Im ersten Schritt teilt er in die Seite links $(A + B)$ und rechts (C) des Gleichheitszeichens auf, im zweiten in das Übrigbleibende (A) und das Wegfallende $(B = C)$.

6 Diskussion

Die vorliegende Studie interessiert sich für die individuellen Sichtweisen auf algebraische Ausdrücke. Daher wird untersucht, wie Personen die einzelnen Teile eines Ausdrucks aufeinander beziehen. Durch solche Bezüge stellen die Personen Zusammenhänge im Ausdruck her und erkennen insbesondere mögliche Umformungen. Durch die Beschreibung der hergestellten Bezüge wird erstens explizit gemacht, in welche Bündel ein Proband die algebraische Zeichenreihe aufteilt und als was er sie interpretiert. Zweitens wird die Darstellung davon möglich, wann und wie der Proband einen bestimmten Bezug herstellt. Das erlaubt die Rekonstruktion des Gebrauchs eines Bezugs und damit der internen Bedeutung des Ausdrucks, die der Proband ihm zuweist. Zur Umsetzung dieser Idee sind in diesem Artikel die Begriffe der Anwendbarkeitsbedingung, der Strukturierung, der Konsequenz und der Abschlussbedingung (vgl. Abb. 3) eingeführt worden. Diese Begriffe wurden zur Analyse von Interviews verwendet. Insgesamt konnten vier Ebenen des Herstellens von Bezügen identifiziert werden: In einem Ausdruck Bezüge herstellen kann heißen, ihn optisch einfacher machen, ihn ändern, Teile umdeuten oder den Ausdruck klassifizieren. Diese Ebenen stellen vier Formen des diagrammatischen Denkens im Rahmen des algebraischen Umformens dar.

Im Folgenden wird auf die Frage der Förderung des Herstellens von Bezügen im Algebraunterricht fokussiert. Weil dabei die Unterscheidung in verfahrenbasierte und verfahrenbildende Bezüge wichtig ist, wird vorgängig diese diskutiert.

6.1 Verfahrenbasierte und verfahrenbildende Bezüge

Die Unterscheidung in verfahrenbasierte und verfahrenbildende Bezüge war durch die Aufteilung der Wahrnehmung in absteigende und aufsteigende Prozesse motiviert. Diese Wahrnehmungsprozesse laufen parallel ab und sind miteinander gekoppelt. Die Beispiele in Abschn. 5 illustrieren allerdings, dass die Bezüge durchaus idealtypisch in verfahrenbasierte und verfahrenbildende eingeteilt werden können. Zu beachten ist aber, dass verfahrenbasierte Bezüge Anteile von verfahrenbildendem Strukturieren haben und umgekehrt. Beispielsweise muss jedes Verfahren angewendet werden und jede Anwendung ist eine neue Situation. Das heißt, jede Anwendung eines Verfahrens bedingt prinzipiell auch aufsteigende Prozesse. Umgekehrt zeigt das Beispiel von Experte12, dass verfahrenbildende Prozesse auch verfahrenbasierte Anteile haben. Die in Abb. 7 dargestellte Herstellung eines Bezugs wurde als verfahrenbildend kategorisiert, weil Experte12 zur Entscheidung kein Verfahren anwendete. Der Bezug zwischen $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ und $\frac{4x}{x-4}$ wurde aufgrund der konkreten Gleichung generiert. Er diente der Entscheidung, ob das Verfahren des Gleichungstyps $A \cdot B = 0$ angewendet werden kann. Hier spielen verfahrenbasierte Prozesse insofern eine Rolle, als Experte12 die Anwendung des Verfahrens zum Lösen einer Gleichung des Typs $A \cdot B = 0$ im Voraus erahnte – nach Boero (2001) ist *Antizipation* das zentrale Merkmal für algebraische Expertise. Doch bei einer anderen Gleichung hätte der Bezug, welcher der Entscheidung für oder gegen dieses Verfahren dient, im Allgemeinen qualitativ völlig anders ausgesehen. Diese Überlegung führte bei der Auswertung zur Kategorisierung des Bezugs als eines verfahrenbildenden.

Bei der Auswertung der Interviews wurden nur explizierbare, eindeutig anwendbare, also algorithmisierbare Prozeduren als Verfahren kategorisiert, welche den verfahrenbasierten Bezügen zugrunde lagen. Bei den identifizierten Verfahren handelte es sich jeweils um bekannte, durchaus plausible Strategien. Es wäre auch möglich gewesen, falsche Verfahren – Malle (1993, S. 176) spricht von „Privatschemata" – als Verfahren zu bezeichnen. Die Interviews waren aber nicht auf die Rekonstruktion dieser Verfahren ausgerichtet.

6.2 Wie das Herstellen von Bezügen im Mathematikunterricht gefördert werden kann

Das in diesem Artikel vorgestellte Konzept des Strukturierens als Herstellen von Bezügen legt nahe, Strukturieren durch relationales Denken (Carpenter et al. 2003) zu fördern. Die von Carpenter, Franke und Levi vorgeschlagenen Aufgabenformate (vgl. Einleitung) zur Förderung des relationalen Denkens in der Grundschule regen die Kinder zur Herstellung von Bezügen an. Ziel ist, dass die Kinder nicht rechnen, sondern geeignete Bezüge herstellen. Denn durch das viele Üben von Rechenaufgaben lernen die Kinder nicht automatisch, relational zu denken. Entsprechend lernt man durch viele Umformungsübungen nicht automatisch das Strukturieren. Daher wird hier die Hypothese aufgestellt, dass manche Schülerinnen und Schüler Mühe beim Strukturieren algebraischer Ausdrücke haben, weil sie diese vorwiegend verfahrenbasiert strukturieren. Konsequenterweise müssen sie zum verfahrenbildenden Strukturieren angeregt werden.

Zur Umsetzung dieser Hypothese im Unterricht können obige zwei Aufgabenformate gleichermaßen adaptiert werden. Beim Thema der Bruchterme und Bruchtermgleichungen bieten sich dann einerseits Aufgaben an wie

$$\frac{2x}{x^2+1} + \cdots = \frac{3x}{x^2+1} \quad \text{oder} \quad \frac{3x^2+1}{6x^2+2} = \frac{\ldots}{4(x^4+1)}.$$

Hier sind die Lücken so auszufüllen, dass die Gleichungen allgemeingültig werden. Andererseits können Aussagen wie

$$\frac{4-8x}{2-8x} = 2 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{1+x} = (2+x) \cdot \frac{x}{1+x} - 2 \cdot \frac{x}{1+x}$$

auf ihre Allgemeingültigkeit untersucht werden. Dabei sind die Schülerinnen und Schüler aufzufordern, sich die Ausdrücke anzuschauen, einzelne Teile miteinander zu vergleichen, möglichst wenig zu rechnen und ihre Entscheidungen zu begründen. Die Idee ist, einzelne solcher Aufgaben immer mal wieder im Algebraunterricht aufzugreifen, und nicht, Dutzende von Päckchen davon nacheinander abzuarbeiten. Auf jeden Fall sind sie als Gesprächsanlass zu nehmen, um die eigenen Bezüge explizit zu machen, sie mit jenen der Mitschülerinnen und -schüler zu vergleichen und so die angemessenen Bezüge den unangemessenen gegenüberzustellen. Bei solchen Unterrichtsgesprächen realisieren die Schülerinnen und Schüler, dass algebraische Ausdrücke nicht (nur) als Einladung zur Ausführung von erlernten Verfahren zu verstehen sind, sondern interpretiert werden können, indem Bezüge zwischen Teilen so zu bilden sind, dass sie zu korrekten Umformungen führen. Es ist für Lernende äußerst hilfreich, exemplarisch zu erfahren, welche Bezüge andere herstellen und wie sie diese nutzen. Wie ein algebraischer Ausdruck angemessen wahrgenommen werden kann, muss schließlich ausgehandelt werden. Aufgrund eines solchen Diskurses entwickelt die Klasse auf natürliche Weise das Bedürfnis für ein geeignetes Vokabular. Sie erkennt den Wert eines Fachvokabulars zur Beschreibung von eigenen und fremden Bezügen. Die Fachsprache wird wichtig. Fachbegriffe wie Teilterm, Differenz, Summe, Proportion spielen dann eine Rolle. Erst eine gemeinsame Fachsprache (Hoch und Dreyfus 2010; Kirshner und Awtry 2004) ermöglicht ein gegenseitiges Verstehen. Denn Schülerinnen, Schüler und Lehrpersonen können Zusammenhänge zwischen ihren unterschiedlichen Wahrnehmungen eines algebraischen Ausdrucks nur diskursiv herstellen. Die Fachsprache ist Mittel zum Explizieren der Bezüge. Einerseits müssen sich die Lehrpersonen Klarheit darüber verschaffen, welche Bezüge in ihrer Klasse hergestellt werden. Dazu kann die Lehrperson zum Beispiel ein Klassengespräch nutzen, im Rahmen einer individuellen Beratung entsprechende Fragen stellen oder auch Lernjournale (Ruf und Gallin 1998) gezielt einsetzen. Andererseits können Lehrpersonen die Wahrnehmungen in ihrer Klasse mit Hilfe der Sprache lenken. Die dazu notwendigen präzisen Formulierungen sind nur im Rahmen einer gemeinsamen Fachsprache sinnvoll.

Die konkrete Ausarbeitung solcher Ideen sowie die empirische Überprüfung der damit verbundenen Hypothesen ist Gegenstand meiner aktuellen Entwicklungs- und Forschungsarbeiten.

Literatur

Ballstaedt, S. P., Mandl, H., Schnotz, W., & Tergan, S. O. (1981). *Texte verstehen, Texte gestalten*. München: Urban & Schwarzenberg.

Boero, P. (2001). Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Hrsg.), *Perspectives on school algebra* (S. 99–119). Dordrecht: Kluwer Academic.

Brandom, R. B. (2000). *Expressive Vernunft*. Frankfurt: Suhrkamp.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebraic in the elementary school*. Portsmouth: Heinemann.

Chi, M. T. H., Feltovich, P. J., & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, *5*, 121–152.

Dörfler, W. (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. *JMD - Journal für Mathematik-Didaktik*, *27*(3/4), 200–219.
Epple, M. (1994). Das bunte Geflecht der mathematischen Spiele. *Mathematische Semesterberichte*, *41*, 113–133.
Ericsson, K. A. (2006). Protocol analysis and expert thought: concurrent verbalizations of thinking during experts' performance on representative tasks. In K. A. Ericsson, N. Charness, P. Feltovich, & R. R. Hoffman (Hrsg.), *Cambridge handbook of expertise and expert performance* (S. 223–242). Cambridge: Cambridge University Press.
Fischer, R. (1984). Geometrie der Terme oder elementare Algebra vom visuellen Standpunkt aus. *Didaktikheft der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*, *11*, 29–44.
Gallin, P. (2008). „Zwei Welten" – der Dreisatz im dialogischen Mathematikunterricht. In U. Ruf, S. Keller, & F. Winter (Hrsg.), *Besser lernen im Dialog: Dialogisches Lernen in der Unterrichtspraxis* (S. 162–212). Seelze: Kallmeyer.
Gerstenmaier, J., & Mandl, H. (1994). Wissenserwerb unter konstruktivistischer Perspektive. *Zeitschrift für Pädagogik*, *41*, 867–888.
Gropengießer, H. (2007). *Didaktische Rekonstruktion des Sehens*. Oldenburg: Didaktisches Zentrum.
Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 65–97). New York: Macmillan.
Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: the effect of brackets. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Hrsg.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for psychology of mathematics education* (S. 49–56). Bergen: Bergen University College.
Hoch, M., & Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Hrsg.), *Proceedings of the 29th conference of the international group for psychology of mathematics education* (S. 145–152). Melbourne: PME.
Hoch, M., & Dreyfus, T. (2010). Nicht nur umformen, auch Strukturen erkennen und identifizieren – Ansätze zur Entwicklung eines algebraischen Struktursinns. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *52*(33), 25–29.
Hoffmann, M. H. G. (2005). *Erkenntnisentwicklung*. Frankfurt: Vittorio Klostermann.
Kattmann, U., & Gropengiesser, H. (1996). Modellierung der didaktischen Rekonstruktion. In R. Duit & C. Rhöneck (Hrsg.), *Lernen in den Naturwissenschaften* (S. 180–204). Kiel: IPN.
Kellman, P. J., Massey, C. M., & Son, J. Y. (2009). Perceptual learning modules in mathematics: enhancing students' pattern recognition, structure extraction, and fluency. *Topics in Cognitive Science*, *2*(2), 1–21.
Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: a structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Hrsg.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (S. 33–56). Hillsdale: Erlbaum.
Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Guitérrez & P. Boero (Hrsg.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (S. 11–49). Rotterdam: Sensepublishers.
Kirshner, D. (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(3), 274–287.
Kirshner, D., & Awtry, T. (2004). Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(4), 224–257.
Landy, D., & Goldstone, R. L. (2007a). Formal notations are diagrams: evidence from a production task. *Memory & Cognition*, *35*(8), 2033–2040.
Landy, D., & Goldstone, R. L. (2007b). How abstract is symbolic thought? *Journal of Experimental Psychology*, *33*(4), 720–733.
Lengnink, K. (2005). „Abhängigkeiten von Größen" – zwischen Mathematikunterricht und Lebenswelt. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *47*(2), 13–19.
Lengnink, K., Prediger, S., & Weber, C. (2011). Lernende abholen, wo sie stehen. Individuelle Vorstellungen aktivieren und nutzen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *53*.
Lijnse, P. L. (1995). „Development research" as a way to an empirically based „didactical structure" of Science. *Science Education*, *79*(2), 189–199.
Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *40*(2), 173–199.
Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.
Mayring, P. (2003). *Qualitative Inhaltsanalyse*. Weinheim: Beltz Verlag.
Matz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. In D. Sleeman & J. S. Brown (Hrsg.), *Intelligent tutoring systems* (S. 25–50). New York: Academic Press.

Mayer, R. E. (1982). Different problem-solving strategies for algebra word and equation problems. *Journal of Experimental Psychology*, *8*(5), 448–462.

Radford, L., & Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 145–164.

Rüede, C. (2009). Wenn das Unausgesprochene regelnd wirkt – eine theoretische und empirische Arbeit zum Impliziten. *JMD - Journal für Mathematik-Didaktik*, *30*(2), 93–120.

Rüede, C. (submitted). How secondary level teachers and students impose individual structure on fractional expressions and equations—an expert-novice study. Educ. Stud. Math.

Ruf, U., & Gallin, P. (1998). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik*. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Schoenfeld, A. H., & Herrmann, D. J. (1982). Probelm perception and knowledge structure in expert and novice mathematical problem solvers. *Journal of Experimental Psychology*, *8*(5), 484–494.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and piftalls of reification—the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191–228.

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern*. Hildesheim: Franzbecker.

Star, J. R., Glasser, H., Lee, K., Beste, G., Mustafa, D., & Kuo-Liang, C. (2005). Investigating the development of students' knowledge of standard algorithms in algebra. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada, April 2005.